ASAL SAYILAR İLE İLGİLİ BİLGİLER

*M.Ali GÜMÜŞ

ÖZET

Bu makalede asal sayıların tarihine kısaca değinilmiş ve asal sayılar ile ilgili tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Bazı asal sayı çeşitleri ve asal sayıları bulmada kullanılan bir takım yöntemler incelenmiştir. Ayrıca Eratosthenes Kalburu hakkında bilgiler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Asal sayılar,Eratosthenes Kalburu,Komşu asallar

ABSTRACT

This article briefly touches upon the history of prime numbers and includes definitions and theorems about prime numbers. Some types of prime numbers and some methods used to find prime numbers are examined. In addition, information was given about the Eratosthenes Heart.

Keywords: Prime numbers, Heart of Eratosthenes, Neighboring primes

* Keciören Bilim ve Sanat Merkezi - muhammedali9876543210@gmail.com

ASAL SAYI NEDİR?

Her tam sayı kendisine ve 1’e kalansız olarak bölünür. Pek çok tam sayı başka tam sayılara da kalansız bölünebilirken bazı sayılar kendisinden ve 1’den başka sayıları bölen olarak kabul etmez. İşte o inatçı sayılara asal sayı deriz.

Burada ilk dikkat çeken ayrıntı 1’in bu listede olmayışıdır. Oysa o da kendinden ve 1’den başka tam sayıya kalansız olarak bölünmüyor. Bu listeye alınmaması matematikçilerin kendi aralarında aldığı bir kararın sonucudur.(1)

Aşağıda 1ile 100 arasındaki asal sayılar belirtilmiştir.

(http://nisatanburaci.blogspot.com/2018/01/asal-saylar.html)

KAC TANE ASAL SAYI VAR?

Asal sayılar hakkında sadece yukarıdaki bilgilere sahip olduğumuzu düşünelim. Sadece 2 sayısının asal olduğunu hesaplamış olsak ve tembelliğimizden başka asal sayı var mı diye bakmamış olsak bile sonsuz tane asal sayı olması gerektiğini bilebiliriz. Bunu ilk fark eden kişi Öklid olmuştur. Öklid’e göre eğer sonlu sayıda asal sayı içeren bir liste alırsak mutlaka bu listede olmayan başka bir asal sayının var olduğunu gösterebiliriz. Bu durumda tüm asal sayılar kümesi sonlu bir küme olamaz. Öklid’in bugün hâlâ güzelliğini koruyan akıl yürütmesi çok kısadır. İlk önce en az bir asal sayı içeren sonlu bir asal sayı listemiz olduğunu düşünelim. Bu listedeki tüm asalları çarpalım ve çıkan sayıya 1 ekleyelim. Bu bulduğumuz sayı listemizdeki asalların hepsinden büyük olduğu için kendisi bu listede değil. Öte yandan elde ettiğimiz bu sayı listemizdeki asalların her birine böldüğünde daima 1 kalanını verecek. Demek ki bu sayı ya kendisi asaldır ya da listemizde olmayan bir başka asal sayıya bölünür. Böylece listemizde olmayan bir başka asalın var olması gerektiğini gördük. Sonsuz tane asal olması gerektiği sonucuna ne kadar az emekle vardığımıza dikkatinizi çekmek isterim. İlk önce sadece 2 sayısının asal olduğunu gördük. Sonra her sayının ya kendisinin

* Keciören Bilim ve Sanat Merkezi - muhammedali9876543210@gmail.com

asal olacağını ya da bir başka asalın onu bölmesi gerektiğini gördük. Bu kadarcık bilgiyle yola çıkıp bu asal dediğimiz sayılardan sonsuz tane olması gerektiğini bulduk.(2)

KOMSU ASALLAR

Birbirini takip eden asallar arasında en az ve en çok ne kadar aralık olur sorusu asallarla ilgilenmeye başlayınca ilk akla gelen sorulardan biridir. İlk önce iki ardışık asalın birbirinden ne kadar uzak olabileceği sorusuyla ilgilenelim, çünkü o soruyu cevaplamak daha kolay. Bir sayı tutun. Aralarındaki fark tuttuğunuz o sayıdan daha fazla olan iki ardışık asal mutlaka vardır. Örneğin 5 sayısını tutmuş olun. Ardışık beş tane bileşik sayı yazacağız. 722, 723, 724, 725, 726 Bu sayılar sırasıyla 2, 3, 4, 5 ve 6 ile bölünür. Demek ki 722'den küçük ilk asalla 726'dan büyük ilk asal arasında en az beş fark var. Gerçekten de aralarında bu sayılar olan asallar 719 ve 727'dir ve aralarındaki fark beşten büyüktür. Burada 722 sayısını bulmak için önce 1x2x3x4x5x6=720 sayısını buldum. Yukardaki sayıları şimdi şöyle yazabiliriz. 1x2x3x4x5x6+2, 1x2x3x4x5x6+3, 1x2x3x4x5x6+4, 1x2x3x4x5x6+5, 1x2x3x4x5x6+6 Hiç hesap yapmadan, sadece gözümüzle takip ederek ilk sayıyı oluşturan iki parçanın da 2'ye bölündüğünü, ikinci sayıyı oluşturan iki parçanın da 3'e bölündüğünü (ve bu böyle devam eder) görürüz. 1x2x3x4x5x6 sayısını kısaca 6! olarak yazarız. Şimdi 5 yerine çok daha büyük bir sayı tutalım ve bu sayıya N diyelim. (N+1)!=1x2x3x ... x(N+1) sayısının 2, 3, ..., N+1 sayılarına kalansız bölünebildiğini açıkça görüyoruz. Bu durumda (N+1)!+2, (N+!)!+3, ..., (N+1)!+(N+1) sayılarının sırasıyla 2, 3, ... , N+1 ile bölündüğünü, dolayısıyla hiç birinin asal olmadığını yine gözümüzle kontrol ederek hiç işlem yapmadan görürüz. Bu durumda (N+1)!+2 sayısından önce gelen ilk asal sayıya p, (N+1)!+(N+1) sayısından sonra gelen ilk asal sayıya q dersek q-p>N bulduk. Demek ki hiçbir asala rastlamadan ilerleyeceğimiz, istediğimiz uzunlukta sayı aralıkları vardır. Buna rağmen asalların sonsuz tane olduğunu hatırlayalım. Asallar hem çoklar hem de birbirlerinden istenildiği kadar uzak olabiliyorlar. Ama her sayı ile o sayının iki katı arasında da mutlaka en az bir asal sayı bulunur. Buna göre eğer p asal bir sayıysa bir sonraki asal sayı mutlaka 2p'den küçük olacaktır. Eğer bu teoremi başta bilseydik asalların sonsuz tane olacağını Öklid'in yardımı olmadan hemen söyleyebilirdik. Ama tarihin akışına uyduk: Öklid MÖ 5. yüzyılda yaşamış, bu teorem ise ancak 19. yüzyılda kanıtlanabilmiştir.(1)

MERSENNE SAYILAR

Mersenne sayıları , matematikte ikinin kuvvetlerinin bir eksiği olan sayılardır ve n doğal sayısı için $Mn = 2n - 1$ şeklinde hesaplanır. Adını Fransız matematikçi, filozof, keşiş ve müzik teorisyeni ve "akustiğin babası" olarak bilinen Marin Mersenne'den alınmıştır. Marin Mersenne 17. yüzyılın başlarında bu sayılar üzerinde çalışmıştır ve güzel sonuçlar elde etmiştir.

* Keciören Bilim ve Sanat Merkezi - muhammedali9876543210@gmail.com

FERMAT SAYILARI

Fermat sayıları, n sıfırdan küçük olmayan bir tam sayı olmak üzere;

$$Fn = 2_2^n + 1$$

Şeklinde yazılabilen sayılardır. İsimlerini, bu sayıları ilk kez incelemiş olan 17. yüzyıl matematikçisi Pierre de Fermat'tan almıştır. İlk 3 Fermat sayısı şunlardır;

$$F0 = 2 + 1 = 3$$

$$F1 = 4 + 1 = 5$$

$$F2 = 16 + 1 = 17$$

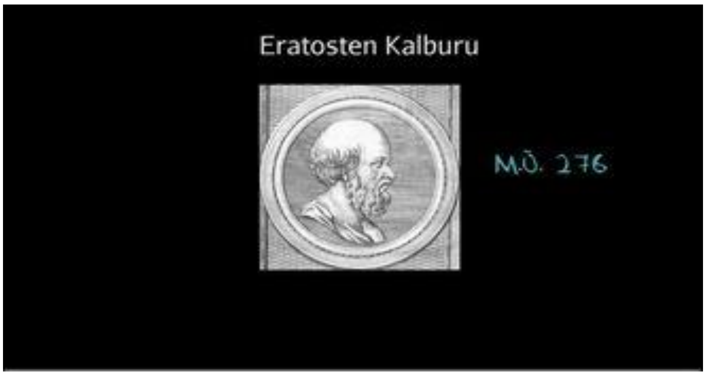
(n) sayısı büyüdükçe F(n) sayısı büyük değerler almaya başladığından, Fermat sayılarını çarpanlarını ayırmak da zorlaşacaktır. Nitekim (n)>11 için fermat sayıları henüz asal çarpanlarına ayrılamamıştır. Dolayısıyla, n > 4 için asal bir fermat sayısı olup olmadığı ise hala açık bir sorudur.

ERATOSTHENES KALBURU

Eratosthenes MÖ 200'lü yıllarda yaşamıştır. Dünya'nın yuvarlak olduğunu ileri sürmüş hatta değişik yerlerdeki iki çubuğun gölgelerinin uzunluğunu ve bu çubuklar arasındaki mesafeyi ölçerek Dünya'nın çapını hesaplamıştır. Asal sayılara da ilgi duymuş ve bugün hâlâ asal sayı bulmak için en kolay yol olan meşhur "kalbur" yöntemini ortaya atmıştır. Kendi adıyla anılan bu yöntem şöyle çalışır. Tüm tam sayıları 2'den başlamak üzere yan yana yazın. O kadar zamanınız yoksa sabrınızın yettiği bir yere kadar yazın. O durumda aşağıdaki yöntemi uyguladığınızda sadece o yazdığınız yere kadar olan asal sayıları bulacaksınız. 2 sayısını daire içine alın ve 2'nin katı olan tüm sayıların üzerine birer çarpı koyun. Sonra geri gelip işaretlenmemiş ilk sayıyı bulun. Bu durumda bu sayı 3 olacak. 3 sayısını bir daire içine alın ve 3'ün katları olan tüm sayıların üzerine bir çarpı koyun. Böylece her seferinde geri gelip işaretlenmemiş ilk sayıyı daire içine alıp onun katlarının üzerine çarpı koyacaksınız. Bu işlem bittiğinde daire içine alınmış sayılar asal sayılar olacak ve tüm asal sayılar böylece bulunmuş olacak. Asal olmayan sayıları eleyip asal olanları üstte bıraktığı için bu yönteme kalbur yöntemi denir. Bu yöntemle tüm asal sayıları bulabiliriz, ama onları saklamak için sonsuz yerimiz olmadığı için ancak sonlu sayıda asal sayıyı bilgisayarlarda saklayabiliriz ve verilen bir sayı asal mı değil mi diye merak ettiğimizde o listeye başvurabiliriz. Listeye alamadığımız çok daha büyük sayıların asal olup olmadığını anlamak için bölenleri olup olmadığını denemekten başka bir çaremiz henüz yok. İnternet alışveriş siteleri ve elektronik bankacılık sistemleri, verilen bir sayının çarpanlarının kolay kolay bulunamayacağı gerçeğini güvenlik için kullanır. Örneğin verilen sayı 150 ise hemen çarpanlarını bulabilirsiniz. Ama eğer verilen sayı 150 basamaklıysa en hızlı bilgisayarlarla bile Güneş'in kalan ömrü içinde o sayının çarpanlarını bulamazsınız. Asal sayıların şifreleme tekniklerinde kullanılmasının

* Keciören Bilim ve Sanat Merkezi - muhammedali9876543210@gmail.com

sebebi işte budur, ama şimdilik bu konuya girmeyelim. Pi(n) ~ n/ log (n) olur diye umut ederiz. Buradaki ~ işareti "aşağı yukarı aynı" anlamındadır. Çok büyük n sayıları kullanarak iki tarafı da hesaplarsak iki taraf arasındaki farkın n sayısına oranının küçük olduğunu görürüz. Burada dikkat edilecek şey, iki taraf arasındaki farkın n büyüdükçe büyümesi ama bu farkı n'e böldüğümüz zaman çok küçük sayılar elde etmemizdir. Kısacası n sonsuza giderken yukarıdaki ifadede yer alan "aşağı yukarı aynı" iddiası "aynı" iddiasına dönüşür. Bu ise sayılar kuramının meşhur Asal Sayı Teoremi'dir ve ancak yüz yıl önce, Öklid'den iki bin beş yüz yıl sonra kanıtlanmıştır.(1)



(https://www.eba.gov.tr/video/izle/86215c2e1c3037d56425b85271438d52d3d8d2d09c001dc)

SONUC

Sonuç olarak asal sayılar ile ilgili pek çok bilgiye sahibiz ama daha çözünürlüğe kavuşmayan pek çok bilgi var ve yakın gelecekte asal sayılar ile ilgili daha pek çok bilgi edineceğimize eminim.

Umarım sizin için yararlı olmuştur.

* Keciören Bilim ve Sanat Merkezi - muhammedali9876543210@gmail.com

KAYNAKÇA

1.https://edergi.tubitak.gov.tr/edergi/yazi.pdf?dergiKodu=4&cilt=50&sayi=957&sayfa=72&yaziid=40738

2.https://www.matematiksel.org/asal-sayilar-hakkinda-pek-cok-sey/#:~:text=Say%C4%B1lar%C4%B1n%20temelinde%20sayma%20say%C4%B1lar%C4%B1%20vard%C4%B1r,10%2C%2011%2C%2012%2C%20%E2%80%A6&text=Baz%C4%B1%20say%C4%B1lar%C4%B1%20ise%20ay%C4%B1rmak%20m%C3%BCmk%C3%BCn,e%20ve%20kendisine%20tam%20b%C3%B6l%C3%BCn%C3%BCr.

* Keciören Bilim ve Sanat Merkezi - muhammedali9876543210@gmail.com